

Federico Batini

ANALIZZO, INTERPRETO, RISOLVO

Percorsi per competenze



/ ASSE MATEMATICO

Federico Batini

Analizzo, interpreto, risolvo

Percorsi per competenze





**LOESCHER
EDITORE
TORINO**

© Loescher Editore - Torino 2014
<http://www.loescher.it>

I diritti di elaborazione in qualsiasi forma o opera, di memorizzazione anche digitale su supporti di qualsiasi tipo (inclusi magnetici e ottici), di riproduzione e di adattamento totale o parziale con qualsiasi mezzo (compresi i microfilm e le copie fotostatiche), i diritti di noleggio, di prestito e di traduzione sono riservati per tutti i paesi. L'acquisto della presente copia dell'opera non implica il trasferimento dei suddetti diritti né li esaurisce.

Le fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, commi 4 e 5, della legge 22 aprile 1941 n. 633.

Le fotocopie effettuate per finalità di carattere professionale, economico o commerciale o comunque per uso diverso da quello personale possono essere effettuate a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da:

CLEARedi, Centro Licenze e Autorizzazioni per le Riproduzioni Editoriali,
Corso di Porta Romana 108, 20122 Milano

e-mail autorizzazioni@clearedi.org e sito web www.clearedi.org

L'editore, per quanto di propria spettanza, considera rare le opere fuori dal proprio catalogo editoriale. La fotocopia dei soli esemplari esistenti nelle biblioteche di tali opere è consentita, non essendo concorrenziale all'opera. Non possono considerarsi rare le opere di cui esiste, nel catalogo dell'editore, una successiva edizione, le opere presenti in cataloghi di altri editori o le opere antologiche.

Nel contratto di cessione è esclusa, per biblioteche, istituti di istruzione, musei ed archivi, la facoltà di cui all'art. 71 - ter legge diritto d'autore.

Maggiori informazioni sul nostro sito: <http://www.loescher.it>

Ristampe

6	5	4	3	2	1	N
2019	2018	2017	2016	2015	2014	

ISBN 9788858310496

Nonostante la passione e la competenza delle persone coinvolte nella realizzazione di quest'opera, è possibile che in essa siano riscontrabili errori o imprecisioni. Ce ne scusiamo fin d'ora con i lettori e ringraziamo coloro che, contribuendo al miglioramento dell'opera stessa, vorranno segnalarceli al seguente indirizzo:

Loescher Editore s.r.l.
Via Vittorio Amedeo II, 18
10121 Torino
Fax 011 5654200
clienti@loescher.it

Loescher Editore S.r.l. opera con sistema qualità certificato CERMET n. 1679-A secondo la norma UNI EN ISO 9001-2008

Contributi

I percorsi sono realizzati in collaborazione con Andrea Paolini

Realizzazione

Coordinamento editoriale: Rebecca Impellizzieri
Redazione: Gianna Innocenti
Ricerca iconografica: Emanuela Mazzucchetti
Progetto grafico: Fregi e Majuscole - Torino
Realizzazione tecnica: LIV - Torino
Copertina: Leftloft - Milano/New York
Fotolito: Graphic Center - Torino
Stampa: Sograte Litografia - zona industriale Regnano
06012 - Città di Castello (Perugia)

Indice

■ Introduzione

1.	Matematica e noci di cocco	5
2.	Che cosa significa sviluppare (far sviluppare) le competenze	10
3.	Le 16 competenze di base e le competenze di cittadinanza	12
4.	Le competenze e le Indicazioni nazionali	13
5.	L'asse matematico	18
6.	Le competenze obiettivo e la loro declinazione	20

I percorsi

1.	Percorso 1	26
2.	Percorso 2	46
3.	Percorso 3	64
4.	Percorso 4	73

■	Fonti e materiali utili	93
---	-------------------------	----

■ www.loescher.it/competenze

- On line:
- il quaderno operativo dei percorsi per lo studente
 - la normativa di riferimento
 - materiali integrativi per l'attività in classe

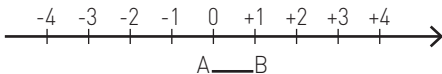
Percorso 1

Io e la matematica

Unità di apprendimento 1	Io e la matematica
Durata complessiva	20 ore
Collocazione	Unità da collocare all'inizio della scuola secondaria di primo grado, possibilmente nel primo anno (o all'inizio del biennio della secondaria di secondo grado)
Competenza/e obiettivo	Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico e algebrico, rappresentandole anche in forma grafica. L'unità concorre anche al raggiungimento delle seguenti competenze chiave e di cittadinanza: risolvere problemi; acquisire ed interpretare l'informazione; imparare ad imparare.

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
<i>Matematica e vita quotidiana</i>	Incontro di 2 ore	<p>L'insegnante legge ad alta voce il brano stimolo "Le costellazioni" tratto da <i>"Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte"</i> di M. Haddon (Einaudi, 2003, pp. 147-148). In questo brano viene messa in luce, in maniera molto acuta e intuitiva, la differenza di percezione di un evento: la disposizione di stelle nell'universo e la nascita delle costellazioni. A conclusione della lettura del brano si facilita una discussione che verrà avviata dall'insegnante che disegnerà le immagini relative (la cintura di Orione e un dinosauro) nella lavagna a fogli mobili in due fogli distinti e mostrerà il secondo in rapida successione rispetto al primo.</p> <p>Dopo una breve discussione a riguardo, il conduttore proporrà il gioco dei nove punti (cfr Scheda attività 1: <i>Nove punti ...? Unire i puntini ...</i>) e chiederà al gruppo di provare ad unire tutti i punti utilizzando solo quattro linee rette, senza staccare mai la penna dal foglio. Nel fornire le istruzioni occorre dire di provare a unire tutti i 9 punti con sole quattro linee rette senza staccare mai la penna dal foglio, senza aggiungere altro.</p> <p>Il gioco viene risolto soltanto "uscendo dal quadrato" che nel disegno non c'è, nessuno lo ha nominato ma è il nostro cervello che "rintraccia" la forma del quadrato e si fossilizza su quella.</p> <p>Dopo aver lasciato un tempo adeguato per trovare la soluzione (e dicendo chiaramente che chi ha trovato una soluzione deve soltanto girare il proprio foglio e attendere la conclusione dell'esercizio) si spiega, appunto, che nessuno ha inserito la "regola" dello stare all'interno del quadrato.</p> <p>La nostra percezione, a volte, ci porta all'errore, il quadrato che "vediamo" ci condiziona a ricercare una soluzione al suo interno, mentre non c'è alcun vincolo che ci obblighi a rimanerne all'interno. I nove punti sono solo nove punti ... ma la loro disposizione ci "inganna".</p>

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		<p>Queste due attività svolte in parallelo dovrebbero stimolare una riflessione, guidata dall'insegnante, intorno alla necessità di una percezione differente della matematica e di come questa possa trovare estrema utilità nella nostra vita quotidiana.</p> <p>In questa fase introduttiva il cambio di percezione, o perlomeno il tentativo di vedere le cose tramite uno sguardo differente, deve assolutamente essere incentivato nel gruppo, proprio nel tentativo di scardinare o "ammorbidire" quel "blocco mentale", quella "chiusura" che spesso accompagna questa disciplina più di altre.</p> <p>In quest'ottica l'insegnante, a questo punto, condurrà un <i>brainstorming</i> sul perché la matematica piace o meno, riportando i risultati emersi dai ragazzi in evidenza sulla lavagna.</p> <p>Compito dell'insegnante, durante questa attività, non significherà tentare di "far piacere" la matematica al gruppo classe, ma far percepire ai ragazzi come questa insista inevitabilmente e quotidianamente nelle nostre vite. Sarà utile a questo fine, al termine del brainstorming, procedere con la lettura del brano stimolo "A cosa serve la matematica", già incontrato dall'insegnante nella parte introduttiva di questo volume.</p> <p>Quando si dice che il cane stesso nel contendersi l'osso con altri tre applica inconsciamente un criterio d'ordine tra insiemi di grandezze, si può stimolare la discussione del gruppo domandando: "accade sempre così, nel 100% dei casi?"</p> <p>Ovviamente no. Può esserci un'eccezione: il cane potrebbe decidere, se molto affamato, di rischiare, potrebbe percepirsi più veloce, più scaltro e prendersi l'osso. Questo può accadere perché la vita non ha sempre paradigmi matematici esatti che la spieghino e soluzioni semplici e immediate. La vita spesso è imprevedibile e allora si deve procedere per "probabilità" o per "approssimazione", che sono comunque entrambi concetti matematici (questi concetti verranno affrontati negli incontri futuri relativi alla quarta competenza dell'asse matematico: "Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico").</p>
Fatti i calcoli tuoi ...	Incontro di 2 ore	<p>Nell'incontro successivo si darà spazio a ciascuno per fornire esempi di come effettuare calcoli mentalmente, per evidenziare le differenti strategie e sottolineare quelle che sono, soggettivamente, funzionali. L'insegnante fornirà una dimostrazione procedendo a un calcolo a mente di cui dettaglierà, ad alta voce, tutti i passaggi che farà mentalmente. Come ulteriore stimolo possono essere raccontati gli studi fatti sulla matematica di strada e sulla matematica a scuola sui bambini brasiliani riportati nell'introduzione a questo volume. Risulta importante sottolineare come non esistano strategie mentali di calcolo "giuste", ma vi sono, senza dubbio, strategie più "economiche" e strategie "meno economiche". La semplice condivisione delle strategie di calcolo che ciascuno utilizza, costituirà un importantissimo arricchimento per l'intera classe. L'insegnante sottolineerà poi gli aspetti più interessanti dei procedimenti resi noti da ciascun alunno/a.</p>
Numeri sopra il monte o sotto l'acqua	Tre incontri di 2 ore	<p>L'insegnante, dopo aver letto ad alta voce il brano "Tutto con uno" tratto da "Il mago dei numeri" (pag. 10-11), introdurrà il lavoro sugli insiemi numerici.</p> <p>Lo stimolo narrativo, breve, si centerà sulla frase seguente: "Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta solo una cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto." (Il mago dei numeri di Enzensberger, Torino, Einaudi, 1998, p.11).</p>

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		<p>L'insegnante coglierà l'occasione per presentare il volume e consigliarne la lettura individuale (anche fornendo alcuni esempi di passi particolarmente significativi o coinvolgenti per motivare alla lettura e incuriosire). Il volume è estremamente indicato per l'approccio semplice, ma non banale (e al contempo fantasioso e umoristico) con cui vengono trattati i concetti matematici e il loro rapporto con la nostra esperienza quotidiana di vita, riuscendo nel difficile obiettivo di "avvicinare" la matematica alla propria esistenza.</p> <p>Per iniziare a perseguire gli obiettivi di apprendimento specifici di questa unità sarà importante approcciare gli elementi di base costitutivi della disciplina: i numeri. La Scheda attività 2: <i>Insiemi numerici</i> può essere usata come compendio per schematizzare gli insiemi numerici alla classe, ma anche per consentire una semplificazione ad uso del docente di molti dei contenuti disciplinari fondamentali che dovranno essere fatti propri dai ragazzi al termine della classe terza della secondaria di primo ciclo.</p> <p>Descritte brevemente le tipologie di numeri (N, Z, O, R) e le loro relazioni gerarchiche di insieme si centrerà l'attenzione sui numeri interi relativi (Z).</p> <p>La rappresentazione grafica del Monte Everest e della Fossa della Marianne (cfr Scheda illustrazione: <i>Monte Everest e Fossa delle Marianne</i>) che rappresenta i punti apicali opposti del nostro pianeta, è senz'altro una chiara esemplificazione e introduzione del gruppo dei numeri interi relativi (Z) che consentono, con l'inserimento dei numeri negativi (a segno meno), l'introduzione del concetto di sottrazione e l'applicazione quindi di tutte e quattro le operazioni aritmetiche fondamentali. L'insegnante stimolerà la classe con esempi numerici da posizionare sopra e sotto la linea dello "0". "Sopra e sotto" diventerà poi "destra e sinistra" nella classica rappresentazione grafica della retta dei numeri relativi. L'insegnante proporrà allora alcuni esercizi di "posizionamento" numerico di numeri relativi (quindi non necessariamente interi) su una retta del tipo:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>e chiederà agli allievi, a piccoli gruppi, di trovare definizioni condivise, da verificare poi con l'insegnante, di cosa significhino numeri "positivi", "negativi", "concordi", "discordi", "opposti" e di "valore assoluto" (cfr. Scheda attività 3: <i>Le nostre definizioni</i>).</p> <p>Dopo aver introdotto le operazioni tra numeri relativi di segno opposto o di stesso segno, l'insegnante propone alla classe una scheda da risolvere con relativi calcoli aritmetici tra numeri relativi (Scheda attività 4: <i>Operazioni con numeri relativi</i>) assegnando 30 minuti di tempo per svolgerli.</p> <p>A seguire la classe verrà condotta in un esperimento narrativo: suddivisa dall'insegnante in sottogruppi di tre ragazzi, a ciascun gruppo verrà chiesto, in un tempo definito di circa un'ora, di inventare una storia che abbia per protagonisti i numeri appena incontrati e che descriva in termini narrativi le proprietà delle operazioni tra tali numeri. Le indicazioni sono esplicitate nella Scheda attività 5: <i>Raccontiamo i numeri</i>. All'interno del gruppo sarà scelto un relatore che restituirà l'elaborato al resto della classe, puntualizzando gli elementi matematici del racconto del proprio gruppo.</p> <p>Nell'incontro successivo l'insegnante proporrà di risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici come nella Scheda attività 6: <i>Lettere e numeri</i>. Ciò sarà importante per introdurre il lavoro sulle equazioni e disequazioni.</p>

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		Dopo aver svolto queste attività si procederà alla sostituzione delle incognite e alla definizione della classe di appartenenza dei numeri dei risultati.
<i>I numeri a base 10 e i "saltellanti"</i>	Due incontri da 2 ore	<p>Viene fatta una lettura introduttiva da parte dell'insegnante dal volume <i>"Il mago dei numeri"</i> di H. Enzensberger (da fine di p. 28 all'inizio di p. 40). Questo testo può costituire la narrazione guida per questa unità per la sua capacità di spiegare e raccontare in modo molto semplice argomenti complessi.</p> <p>Nello specifico, seguendo passo passo la narrazione, l'insegnante sceglierà un ragazzo del gruppo classe che, come il Mago dei Numeri nel racconto, tratterà (alla lavagna, anziché in cielo) i segni come dalle indicazioni date nel racconto. L'insegnante fermerà la narrazione dopo la definizione dell'età del protagonista del racconto scritta con l'utilizzo dei numeri romani. A questo punto proporrà al gruppo di definire, seguendo la stessa logica, la classe di età dei ragazzi della classe e farà scrivere direttamente alla lavagna dal proprio <i>"Mago dei Numeri"</i> (l'allievo/a alla lavagna), ciò che viene detto via via dai compagni. Ripresa la narrazione da parte dell'insegnante, sarà importante porre in risalto il valore dello zero (non conosciuto dagli antichi romani) che determina con il suo "saltellamento" la differenza tra il nostro sistema di numerazione a base 10 e quello dei nostri avi.</p> <p>Una volta terminata la narrazione, questa sarà servita da introduzione per esaminare l'elevazione a potenza di un numero e, conseguentemente, le proprietà matematiche delle potenze.</p>
<i>Una soluzione, due soluzioni ...</i>	Due incontri da 2 ore	<p>Avendo operato una distinzione tra i numeri naturali (N) e i numeri relativi (Z), l'insegnante dovrà chiarire molto bene alla classe la differenza tra aritmetica (che utilizza il sistema dei numeri naturali per i propri calcoli e che si limita a operare sostituzioni di variabili letterali con numeri, ma non a operazionalizzare le variabili stesse) e algebra (che invece introduce anche i numeri a segno – meno, gli Z, per i propri calcoli e operazionalizza le variabili alfanumeriche introducendo quindi il concetto di equazione e disequazione).</p> <p>Si sottolineerà come l'aritmetica abbia una valenza molto più vicina alla vita di tutti i giorni (quasi indispensabile alla "sopravvivenza"), mentre l'algebra abbia sì una ricaduta meno evidente e immediata nella vita di tutti i giorni, ma una componente di logica molto forte e utile in senso più trasversale.</p> <p>Definiti quindi questi elementi procedurali, che serviranno da cornice introduttiva per non confondere i ragazzi, l'insegnante introduce i primi semplici esempi di equazione di primo grado a 1 e a 2 incognite.</p> <p>Risulta indispensabile, in questo snodo cruciale, focalizzare l'attenzione e assicurarsi che la classe abbia chiaro tutto quanto svolto fino a qui e sappia intravedere gli esiti e le finalità di quello che andrà a fare. L'esperienza ci dice che è proprio nel passaggio cruciale dai problemi aritmetici a quelli algebrici che si assiste spesso allo scollamento e al blocco che moltissimi studenti nella scuola italiana provano nei confronti della matematica.</p> <p>Dopo alcuni esercizi di soluzione di equazioni di primo grado con passaggio da forma implicita in forma esplicita (es. $x + y - 6 = 0 \Rightarrow y = -x + 6$), l'insegnante chiederà alla classe di provare a rappresentare graficamente equazioni di primo grado proposte. Per continuare l'esempio citato:</p> $y = -x + 6$ <p>A) se $x = 0$ allora $y = -0 + 6 = 6$ B) se $x = 5$ allora $y = -5 + 6 = 1$</p>

Attività	Tempi	Modalità di somministrazione
		<p>(Nota Bene: la scelta di $x = 0$ e 5 è casuale, si può scegliere qualunque valore, anche negativo, utilizzando nel caso i quattro quadranti del piano cartesiano).</p> <p>Trovati quindi i punti, o le coordinate, A (0,6) e B (5,1) e disegnando la retta tra i due punti (per due punti passa una e una sola retta) ecco l'equazione riportata in forma grafica sul piano.</p> <p>Qualunque sia il valore che diamo alle variabili della nostra equazione il risultato sarà comunque 1 (Esempio: $x = 3 + 2y$ se dò alla y il valore di 2, allora il mio unico risultato per la x sarà 7).</p> <p>Per le disequazioni si parla di intervalli di valori come soluzioni. Una disequazione ha per soluzione l'intervallo o quegli intervalli di valori che, attribuiti alle incognite, rendono la disequazione effettivamente verificata. I segni che dividono le disequazioni sono difatti segni di $>$ o $<$ e i risultati sono o l'intervallo dei numeri reali da lì ad infinito o l'insieme vuoto se la disequazione non è confermabile (ad es. risultato $0 < -1$).</p> <p>Può essere utile, al termine dei calcoli, eseguire un piccolo grafico ove possa determinarsi il campo dei valori che verificano la disuguaglianza.</p> <p>Nel grafico, per convenzione, utilizziamo linee continue per indicare l'intervallo in cui la disequazione è soddisfatta, e linee tratteggiate per indicare l'intervallo dove la disequazione non è soddisfatta (come nell'esempio sotto).</p> <p>$2x - 3 > 5 - 4x$ (si spostano le x a primo membro ed i numeri a secondo membro)</p> <p>$2x + 4x > 5 + 3$ (si cambiano i segni nel passaggio)</p> <p>$6x > 8$</p> <p>$x > 8/6$ (si semplifica)</p> <p>$x > 4/3$.</p>
Laboratorio di informatica	Incontro da 2 ore	<p>L'insegnante concluderà il primo percorso "Io e la matematica" in aula informatica lavorando per sottogruppi e chiedendo di impostare e testare una o più funzioni semplici su Excel.</p> <p>I gruppi sceglieranno liberamente il tipo di funzione di calcolo da impostare tra celle Excel collegate, ad esempio la funzione per la potenza di 2 ecc.</p> <p>L'insegnante verificherà poi nei vari gruppi la correttezza nell'impostazione delle funzioni-calcolo, chiedendo al gruppo di inserire vari valori nella/e cella/e di input e di verificarne le risultanze.</p> <p>L'insegnante mostrerà poi l'utilizzo dello strumento funzione previsto dal programma, testando l'applicazione delle funzioni di più frequente utilizzo, anche attraverso l'utilizzo degli esercizi per Excel disponibili in rete.</p> <p>A conclusione dell'ultimo incontro dell'Unità si mostrerà il video (durata 35 minuti) <i>Paperino nel mondo della Matematica</i>.</p>

Materiali

1. Scheda illustrazione: *Monte Everest e Fossa delle Marianne*
2. Scheda docente: *Insiemi numerici*
3. Volume: *Il mago dei numeri*, di H. M. Enzensberger, Einaudi, Torino, 1998.
4. Volume: *Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, di M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003.
5. Aula informatica (per inserimento dati in Excel)
6. Video: *Paperino nel mondo della Matematica* (Disney, 35 minuti) – disponibile su youtube



BRANI STIMOLO



1. *Le costellazioni* da “*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*”, di M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003, pp. 147-148
2. *A cosa serve la matematica*
3. *Tutto con uno* da “*Il mago dei numeri*”, di H. M. Enzensberger, Einaudi, Torino, 1998, p. 11.

SCHEDE ATTIVITÀ



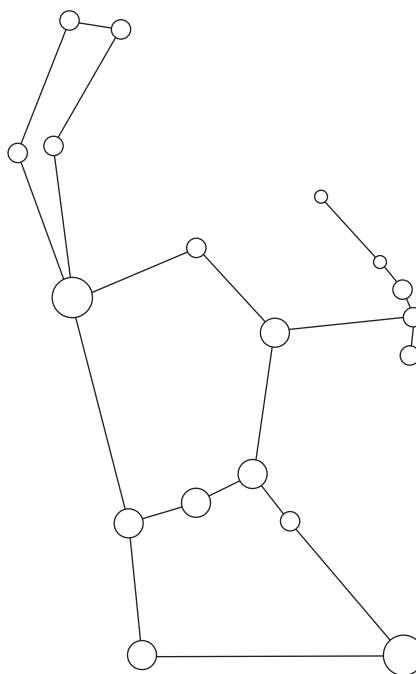
1. *Nove punti ... ? Unire i puntini ...*
2. *Insiemi numerici*
3. *Le nostre definizioni*
4. *Operazioni con numeri relativi*
5. *Raccontiamo i numeri*
6. *Lettere e numeri*

1. Le costellazioni



“Nell’angolo di cielo fra il tetto del capanno e il grande albero che sovrasta lo steccato della casa vicina vidi la costellazione di **Orione**.

Si dice che **Orione** si chiami così perché Orione era il nome di un cacciatore e la costellazione ha la forma di un cacciatore con un bastone e l’arco e le frecce, come in questo disegno

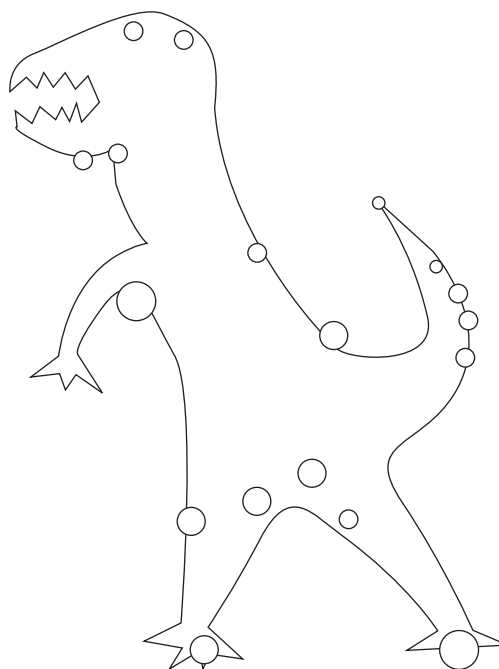


Ma è una cosa davvero stupida perché si tratta solo di stelle, e si potrebbero unire i puntini a piacimento, e allora potrebbe assomigliare a una signora con l’ombrello che saluta con la mano, o alla caffettiera della signora Shears, che viene dall’Italia, con una maniglia e il vapore che esce, oppure a un dinosauro

E non ci sono linee nello spazio, quindi si potrebbero unire dei pezzi di Orione con quelli della costellazione della Lepre o del Toro o dei Gemelli e dire che il nome della costellazione è **Il Grappolo d’Uva** o **Gesù** o **La Bicicletta** (solo che non c’erano le biciclette ai tempi dei Romani e dei Greci che è quando chiamarono **Orione** Orione).

E comunque, Orione non è un cacciatore né una caffettiera o un dinosauro. È solo Betelgeuse e Bellatrix e Alnilam e Rigel e 17 altre stelle di cui non conosco il nome. E sono esplosioni nucleari lontane milioni e milioni di chilometri.

E questa è la verità.”



(*Lo strano caso del cane ucciso a mezzanotte*, M. Haddon, Einaudi, Torino, 2003, pp. 147-148)

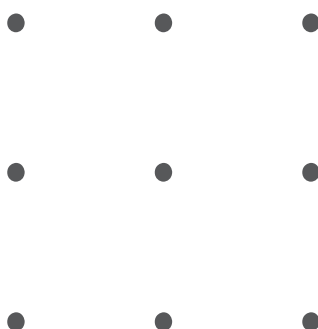
Alunno classe data

Scheda attività 1

Nove punti ... ? Unire i puntini ...



Con soli quattro segmenti retti, senza mai staccare la penna dal foglio, prova a toccare tutti i puntini.



2. A cosa serve la matematica?

Molti si domandano a cosa serve la matematica. Circola da tempo una breve storia, di cui esistono innumerevoli versioni, che cerca di affrontare questa spinosa domanda.

Il modo corretto di porsi questa domanda forse è: vi sono settori della vita quotidiana in cui la matematica non serve?

Sono moltissimi i testi nei quali si è cercato di evidenziare la relazione tra matematica e vita quotidiana. La storia a cui facciamo riferimento mostra un paradosso, ovvero mostra come, in un certo senso, anche gli animali utilizzino la matematica. L'idea sottesa a questa storia è che la matematica ci serva sempre, che sia essenziale alla stessa sopravvivenza.

Un giorno un cane vide un osso. Mentre si stava avvicinando per portarselo via, vide avvicinarsi altri tre cani. A quel punto il cane solitario decise di rinunciare a impossessarsi dell'osso. Potremmo dire che il cane abbia usato, in modo ingenuo, il concetto di numero? In effetti la sua valutazione è stata che confrontandosi contro tre cani non avrebbe potuto ottenere nulla.

Forse si potrebbe obiettare che il cane non ha contato, ma ha solo valutato che gli altri cani erano molti e lui da solo. Se così fosse avrebbe comunque fatto una valutazione in termini di maggiore/minore, cioè avrebbe stabilito una relazione d'ordine, una valutazione di "peso". In realtà dovrebbe anche aver stimato una relazione tra forze, in quanto deve aver stabilito che la somma della forza di tre cani è maggiore della sua propria forza solitaria.

Come facciamo ad asserire una cosa come questa? Se proviamo a sostituire ai tre cani tre mosche che si avvicinano all'osso, non penseremmo certo che il cane se ne vada con la coda tra le gambe ... eppure, anche in questo caso, la relazione numerica lo metterebbe in situazione di svantaggio. Il cane, tuttavia, come apprendiamo dall'esperienza, si prende l'osso senza timore. Che tipo di "considerazione" avrà fatto? In un certo senso potremmo dire che ha valutato che se anche la relazione in termini numerici lo poneva in svantaggio, la relazione di forze, invece, lo poneva in una situazione di vantaggio: la forza di un cane è nettamente superiore alla forza di tre mosche. In qualche senso dovrebbe anche aver ritenuto prioritaria la relazione di forze rispetto a quella numerica per compiere la scelta di prendersi l'osso e andarsene tranquillamente.

Il mondo animale e il mondo degli uomini sarebbero dunque organizzati attraverso il principio dei numeri e attraverso il principio delle forze. A parità di "peso" delle forze prevale il principio numerico, mentre se esiste una disparità di "peso" a prevalere è il principio delle forze.

In conclusione potremmo rispondere alla domanda dicendo che la matematica è essenziale alla sopravvivenza.

3. Tutto con uno

È qui che ti voglio, mio caro, rispose il vecchio. Di magico i numeri hanno che sono semplici. In fondo non ti serve nemmeno la calcolatrice. Per cominciare ti basta una sola cosa: l'uno. Puoi farci quasi tutto. Se ad esempio i numeri grandi ti fanno paura, diciamo ad esempio cinquemilionisettecentoventitremilaottocentododici, allora comincia così:

1+1
1+1+1
1+1+1+1
1+1+1+1+1
...

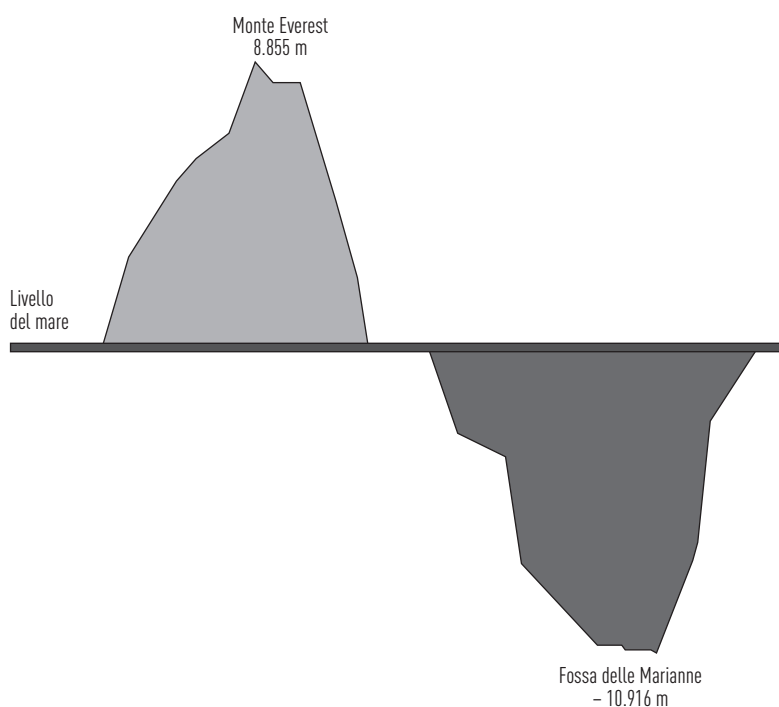
Alunno classe data

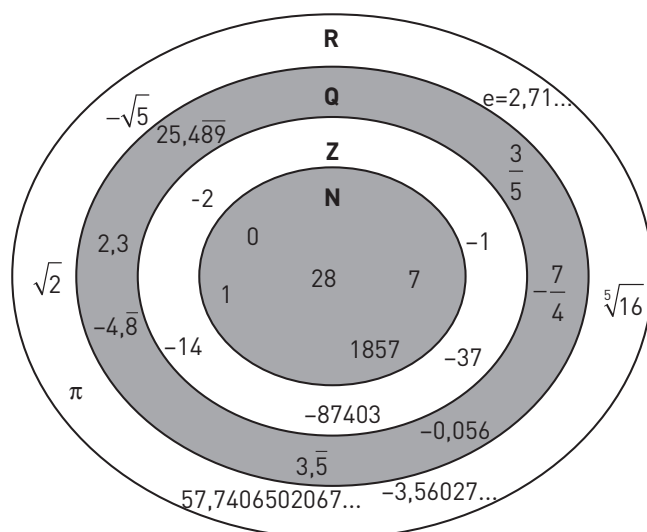
e poi prosegui, fino a cinquemilioneiccetera. Non mi dirai che è troppo complicato! Ci arriva anche un cretino. O no?

- Beh, sì, rispose Roberto.
- E non è tutto, proseguì il mago. In mano adesso reggeva un bastone da passeggio col pomello d'argento che agitava davanti al naso di Roberto.
- Quando arrivi a cinquemilioneiccetera continui a contare. Vedrai che puoi andare avanti all'infinito. Perché i numeri sono infiniti.

(H. M. Enzensberger, *Il mago dei numeri*, Einaudi, Torino, 1998, p. 11)

Scheda illustrazione
Monte Everest e Fossa delle Marianne



Scheda attività 2
Insiemi numerici**R = Numeri Reali****Q = Numeri Razionali****Z = Numeri Interi Relativi****N = Numeri Naturali**

Dal diagramma di Eulero-Venn ovvio è che **N** è un sottoinsieme proprio di **Z**, **Z** è un sottoinsieme proprio di **Q**, **Q** è un sottoinsieme proprio di **R**.

I numeri **Naturali** sono tutti i numeri interi positivi, $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, +\infty\}$. Nell'insieme dei numeri Naturali si possono eseguire le operazioni di: addizione, moltiplicazione e potenza.

I numeri **Interi Relativi** sono tutti i numeri interi positivi e negativi, $\mathbf{Z} = \{-\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$. Nell'insieme dei numeri Interi Relativi, oltre all'addizione, alla moltiplicazione e alla potenza, si può eseguire anche la sottrazione.

I numeri **Razionali Q**, sono tutti i numeri, positivi e negativi, che si possono mettere sotto forma di frazione, e cioè tutti i numeri interi, tutti i numeri decimali limitati, tutti i numeri decimali illimitati periodici e tutte le frazioni.

Nell'insieme dei numeri razionali, oltre all'addizione, alla sottrazione, alla moltiplicazione e alla potenza, si può eseguire anche la divisione. I numeri **Irrazionali I**, sono tutti i numeri che non si possono mettere sotto forma di frazione, e cioè i numeri decimali illimitati non periodici.

I numeri **Reali R**, sono tutti i numeri razionali e irrazionali. Nell'insieme dei numeri reali, oltre alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenza, si può eseguire anche l'estrazione di radice n-esima di qualsiasi numero positivo.

Alunno classe data

Scheda docente
Insieme numerici

I NUMERI NATURALI

La tabellina

$1 \times 1 = 1$	$1 \times 2 = 2$	$1 \times 3 = 3$	$1 \times 4 = 4$	$1 \times 5 = 5$	$1 \times 6 = 6$	$1 \times 7 = 7$	$1 \times 8 = 8$	$1 \times 9 = 9$	$1 \times 10 = 10$
$2 \times 1 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 3 = 6$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 6 = 12$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 8 = 16$	$2 \times 9 = 18$	$2 \times 10 = 20$
$3 \times 1 = 3$	$3 \times 2 = 6$	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 4 = 12$	$3 \times 5 = 15$	$3 \times 6 = 18$	$3 \times 7 = 21$	$3 \times 8 = 24$	$3 \times 9 = 27$	$3 \times 10 = 30$
$4 \times 1 = 4$	$4 \times 2 = 8$	$4 \times 3 = 12$	$4 \times 4 = 16$	$4 \times 5 = 20$	$4 \times 6 = 24$	$4 \times 7 = 28$	$4 \times 8 = 32$	$4 \times 9 = 36$	$4 \times 10 = 40$
$5 \times 1 = 5$	$5 \times 2 = 10$	$5 \times 3 = 15$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 5 = 25$	$5 \times 6 = 30$	$5 \times 7 = 35$	$5 \times 8 = 40$	$5 \times 9 = 45$	$5 \times 10 = 50$
$6 \times 1 = 6$	$6 \times 2 = 12$	$6 \times 3 = 18$	$6 \times 4 = 24$	$6 \times 5 = 30$	$6 \times 6 = 36$	$6 \times 7 = 42$	$6 \times 8 = 48$	$6 \times 9 = 54$	$6 \times 10 = 60$
$7 \times 1 = 7$	$7 \times 2 = 14$	$7 \times 3 = 21$	$7 \times 4 = 28$	$7 \times 5 = 35$	$7 \times 6 = 42$	$7 \times 7 = 49$	$7 \times 8 = 56$	$7 \times 9 = 63$	$7 \times 10 = 70$
$8 \times 1 = 8$	$8 \times 2 = 16$	$8 \times 3 = 24$	$8 \times 4 = 32$	$8 \times 5 = 40$	$8 \times 6 = 48$	$8 \times 7 = 56$	$8 \times 8 = 64$	$8 \times 9 = 72$	$8 \times 10 = 80$
$9 \times 1 = 9$	$9 \times 2 = 18$	$9 \times 3 = 27$	$9 \times 4 = 36$	$9 \times 5 = 45$	$9 \times 6 = 54$	$9 \times 7 = 63$	$9 \times 8 = 72$	$9 \times 9 = 81$	$9 \times 10 = 90$
$10 \times 1 = 10$	$10 \times 2 = 20$	$10 \times 3 = 30$	$10 \times 4 = 40$	$10 \times 5 = 50$	$10 \times 6 = 60$	$10 \times 7 = 70$	$10 \times 8 = 80$	$10 \times 9 = 90$	$10 \times 10 = 100$

Potenza di numero naturale

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

$$a^1 = a$$

$$5^1 = 5$$

$$7^1 = 7$$

$$23^1 = 23$$

$$a^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

$$7^0 = 1$$

$$23^0 = 1$$

$0^0 = ?$ non ha alcun significato

Proprietà delle potenze

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$$

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4}$$

$$a^n : a^p = a^{n-p}$$

$$2^7 : 2^4 = 2^{7-4}$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

$$6^4 : 3^4 = (6 : 3)^4$$

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p}$$

$$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4}$$

Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile per **2** quando termina per cifra pari (0, 2, 4, 6, 8).

Un numero è divisibile per **3** quando il numero formato dalla somma delle sue cifre è divisibile per 3.

Un numero è divisibile per **5** quando termina per zero o per cinque.

Un numero è divisibile per **9** quando il numero formato dalla somma delle sue cifre è divisibile per 9.

Un numero è divisibile per **10** quando termina per zero.

Esempi

345674 è divisibile per 2. 2310411 è divisibile per 3 perché $2 + 3 + 1 + 0 + 4 + 1 + 1 = 12$ che è divisibile per 3.

305685 è divisibile per 5. 3057201 è divisibile per 9 perché $3 + 0 + 5 + 7 + 2 + 0 + 1 = 18$ che è divisibile per 9.

Scomposizione di un numero in fattori primi

Un numero si dice **primo** quando è divisibile solo per se stesso e per 1.

Sono numeri primi, ad esempio: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

Per scomporre un numero in fattori primi, lo si divide per il più piccolo numero primo che sia suo divisore; si divide poi il risultato ottenuto sempre per il suo più piccolo divisore primo, e così di seguito fino ad ottenere 1.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \times 5 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \times 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \times 5 \\ 30 & 2 \times 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

Massimo comune divisore

Il M.C.D. di due o più numeri naturali si ottiene prendendo (dalla scomposizione dei numeri in fattori primi) i fattori comuni, una sola volta, con il minimo esponente.

Esempio

$$M.C.D. (360, 210, 300) = 2 \times 3 \times 5 = 30.$$

Minimo comune multiplo

Il m.c.m. di due o più numeri naturali si ottiene prendendo (dalla scomposizione dei numeri in fattori primi) i fattori comuni e non comuni, una sola volta, con il massimo esponente.

Esempio

$$m.c.m. (360, 210, 300) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600.$$

Espressioni aritmetiche

Nel risolvere le espressioni aritmetiche occorre eseguire i calcoli a partire dalle parentesi più interne (1°- tonde, 2°- quadre, 3°- graffe); l'ordine di esecuzione delle operazioni è il seguente: 1°- potenze, 2°- moltiplicazioni e divisioni, 3°- addizioni e sottrazioni.

$$\begin{aligned} & \{18 + 2 \times [(2^2 + 3^2 + 2 \times 4) : 7 + 5 \times (3 + 42 : 6)] - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 2 \times [(4 + 9 + 2 \times 4) : 7 + 5 \times (3 + 7)] - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 2 \times [(4 + 9 + 8) : 7 + 5 \times 10] - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 2 \times [21 : 7 + 5 \times 10] - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 2 \times [3 + 50] - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 2 \times 53 - 15\} : 109 + 2 = \\ & = \{18 + 106 - 15\} : 109 + 2 = \\ & = 109 : 109 + 2 = \\ & = 1 + 2 = \\ & = 3 \end{aligned}$$

Alunno classe data

NUMERI RAZIONALI ASSOLUTI

I numeri **Razionali** assoluti sono tutti i numeri positivi che si possono mettere sotto forma di frazione.

Una **frazione** è una coppia ordinata di numeri naturali, il secondo dei quali diverso da zero.

$\frac{3}{5}$ è una **frazione**, il numero 3 è detto **numeratore**, mentre il 5 è detto **denominatore**.

$\frac{7}{0}$ non ha significato, non rappresenta alcuna frazione

Per ridurre ai minimi termini una frazione occorre dividere il numeratore e il denominatore per il M.C.D. dei termini della frazione.

$$\frac{28^4}{21_3} = \frac{4}{3}$$

Addizione e sottrazione di frazioni

$$\frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{15 : 3 \times 4 - 15 : 5 \times 2}{\text{m.c.m. (3, 5) = 15}} = \frac{20 - 6}{15} = \frac{14}{15}$$

Moltiplicazione di frazioni

$$\frac{\cancel{8}_1^4}{\cancel{3}_1^3} \cdot \frac{\cancel{9}_5^3}{\cancel{10}_5^2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{12}{5}$$

Divisione di frazioni

$$\frac{8}{3} : \frac{10}{9} = \frac{\cancel{8}_1^4}{\cancel{3}_1^3} \cdot \frac{\cancel{9}_5^3}{\cancel{10}_5^2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 5} = \frac{12}{5}$$

Potenza di una frazione

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$$

Trasformazione di una frazione in numero decimale

Per trasformare una frazione in numero decimale basta eseguire la divisione fra il numeratore e il denominatore.

Esempio $\frac{5}{4} = 5 : 4 = 1,25$

Trasformazione di un numero decimale in frazione

Un numero decimale limitato è uguale ad una frazione che ha per numeratore il numero dato preso senza la virgola, e per denominatore il numero 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Esempi $0,0045 = \frac{45}{10000}$ $30,482 = \frac{30482}{1000}$

Trasformazione di un numero decimale periodico in frazione

Un numero decimale illimitato periodico è uguale ad una frazione che ha per numeratore il numero dato, preso senza la virgola, diminuito del numero che precede il periodo, e come denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempi $32,\overline{57} = \frac{3257 - 35}{99}$ $7,29\overline{481} = \frac{729481 - 729}{99900}$

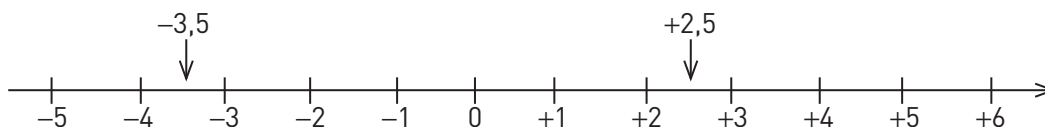
Osservazione

Un numero decimale illimitato non periodico non può essere trasformato in frazione, pertanto è un numero irrazionale.

I NUMERI RELATIVI

I numeri relativi sono tutti i numeri preceduti dal segno più o dal segno meno.

Ad esempio: +3; -7; +3,8; $-\frac{4}{5}$; $-5,8\overline{3}$



Definizioni

Il **valore assoluto** di un numero relativo è il numero privato del segno.

Un numero si dice **positivo** se è preceduto dal segno +.

Un numero si dice **negativo** se è preceduto dal segno -.

Due numeri si dicono **concordi** se hanno lo stesso segno.

Due numeri si dicono **discordi** se hanno segno diverso.

Due numeri si dicono **opposti** quando differiscono solo per il segno.

Esempi

Il valore assoluto di +5 è 5

il valore assoluto di -5 è 5

+7 è un numero positivo

-5 è un numero negativo

-5 e -7 sono numeri concordi

-5 e +7 sono numeri discordi

+5,8 e -5,8 sono numeri opposti.

Regola per togliere le parentesi

Se una parentesi (contenente una addizione algebrica di due o più numeri) è preceduta dal segno +, la parentesi ed il segno + possono essere eliminati:

$$+ (-5 + 7 - 4 + 8 - 6) = -5 + 7 - 4 + 8 - 6$$

Se una parentesi (contenente una addizione algebrica di due o più numeri) è preceduta dal segno -, la parentesi ed il segno - possono essere eliminati, ma occorre cambiare il segno ai termini dentro la parentesi:

$$- (-5 + 7 - 4 + 8 - 6) = +5 - 7 + 4 - 8 + 6$$

Alunno classe data

Addizione e sottrazione

La somma di due numeri concordi si ottiene sommando i numeri dati e mettendo il segno comune.

La somma di due numeri discordi si ottiene facendo la differenza dei numeri dati e mettendo il segno del numero più grande.

$$+7 + 5 = +12$$

$$-7 - 5 = -12$$

$$+7 - 5 = +2$$

$$-7 + 5 = -2$$

Addizione e sottrazione di più numeri

La somma algebrica di più numeri relativi è uguale alla differenza fra la somma dei numeri positivi e la somma dei numeri negativi.

$$-3 + 7 - 8 + 5 - 9 - 4 + 6 - 2 + 1 = (7 + 5 + 6 + 1) - (3 + 8 + 9 + 4 + 2) = 19 - 26 = -7$$

Moltiplicazione e divisione

Il prodotto o il quoziente di due numeri concordi è un numero positivo.

Il prodotto o il quoziente di due numeri discordi è un numero negativo.

$$(+7) \times (+5) = +35$$

$$(-7) \times (-5) = +35$$

$$(+7) \times (-5) = -35$$

$$(-7) \times (+5) = -35$$

$$(+7) : (+5) = +\frac{7}{5}$$

$$(-7) : (-5) = +\frac{7}{5}$$

$$(+7) : (-5) = -\frac{7}{5}$$

$$(-7) : (+5) = -\frac{7}{5}$$

Potenza

$$\left(\begin{matrix} \text{numero} \\ \text{positivo} \end{matrix}\right)^n = \left(\begin{matrix} \text{numero} \\ \text{positivo} \end{matrix}\right)$$

$$(+3)^3 = +27$$

$$(+3)^4 = +81$$

$$\left(\begin{matrix} \text{numero} \\ \text{negativo} \end{matrix}\right)^n = \begin{cases} \text{numero positivo} \\ \text{numero negativo} \end{cases}$$

se l'esponente n è pari

$$(-3)^4 = +81$$

se l'esponente n è dispari

$$(-3)^3 = -27$$

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}$$

$$x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{x^3}$$

Alunno classe data

Scheda attività 3
Le nostre definizioni



Con il tuo gruppo adesso devi cercare le definizioni di numeri “positivi”, “negativi”, “concordi”, “discordi”, “opposti” e di “valore assoluto”. È importante scegliere la definizione che si ritiene migliore e più chiara, e indicare la fonte dalla quale si è reperita (si può anche includere un'altra definizione possibile).

Nome	Definizione	Fonte	Altra definizione possibile
numeri “positivi”			
numeri “negativi”			
numeri “concordi”			
numeri “discordi”			
numeri “opposti”			
“valore assoluto”			

Componenti del gruppo e ruoli rivestiti

Alunno classe data

Scheda attività 4
Operazioni con numeri relativi



1. Riscrivi in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) i seguenti numeri relativi:

+11 -3 0 +2 -5 -7 +1

2. Riscrivi in ordine decrescente (dal più grande al più piccolo) i seguenti numeri relativi:

-5 -2 +3 -1 0 +7 -9 +13 -21

3. Per ciascuno dei seguenti numeri relativi scrivi il valore assoluto

a) $|+3| = \dots\dots\dots$ c) $|-1| = \dots\dots\dots$ e) $|-11| = \dots\dots\dots$
 b) $|-5| = \dots\dots\dots$ d) $|+10| = \dots\dots\dots$ f) $|+7| = \dots\dots\dots$

4. Scrivi tra le seguenti coppie di numeri relativi il simbolo corretto tra $>$ e $<$

a) $-5 \dots -2$ c) $-3 \dots -5$ e) $-0 \dots +1$ g) $-11 \dots -101$
 b) $-3 \dots +5$ d) $-1 \dots +1$ f) $+3 \dots 0$ h) $+100 \dots -99$

5. Per ognuno dei seguenti numeri relativi scrivi il numero opposto

a) $+3 > \dots\dots\dots$ c) $+1 > \dots\dots\dots$ e) $-3 > \dots\dots\dots$
 b) $-2 > \dots\dots\dots$ d) $-11 > \dots\dots\dots$ f) $+5 > \dots\dots\dots$

Scheda attività 5
Raccontiamo i numeri

In gruppo dovrai provare a costruire una storia che, in modo narrativo, riesca a “raccontare” i numeri e le loro proprietà. Non dovrà essere una spiegazione, ma proprio una storiella. Ciascun gruppo individuerà un relatore/una relatrice che poi racconterà la storia al resto della classe. Dopo il racconto, verranno messi in evidenza come sono state presentate narrativamente le caratteristiche e le proprietà di questi numeri.

Alunno classe data

Scheda attività 6
Lettere e numeri



Considera l'equazione

$$x^5 + x^4 + x + 1 = 0$$

a. Una sua soluzione è

- ☐ A. $x = 1/4$
- ☐ B. $x = 1$
- ☐ C. $x =$
- ☐ D. $x = -1$

b. Ci sono altre soluzioni reali?

- ☐ Sì
- ☐ No

Giustifica la tua risposta

.....

.....

.....

Considera l'equazione

$$x^2 + x^2 - 1 = 3$$

La sua soluzione è:
